الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2013

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط:

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$ و المستوي (P) ذا المعادلة: $2y+z+1=0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثمّ تحقّق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

2) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ) احسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب) بيّن أن D نقطة من (P) ، و أن المثلث BCD قائم.

4) بيّن أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثمّ احسب حجمه.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 6$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6-u_{n+1}\le\dfrac{5}{6}(6-u_n)$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 6-u_n\le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ .....(I) حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$؛ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بيّن أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B و C.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، ثمّ استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.

جـ) عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ G.

د) احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$،

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) احسب $f'(x)$. بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جِد حصرا للعدد α.

4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C)، ثمّ ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقة m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) تحقّق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	−0,005
0,23	−0,026
0,24	−0,048
0,25	−0,070

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: (E) ..... $z^2+4z+13=0$

1) تحقّق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثمّ جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ) بيّن أن: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

ب) احسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

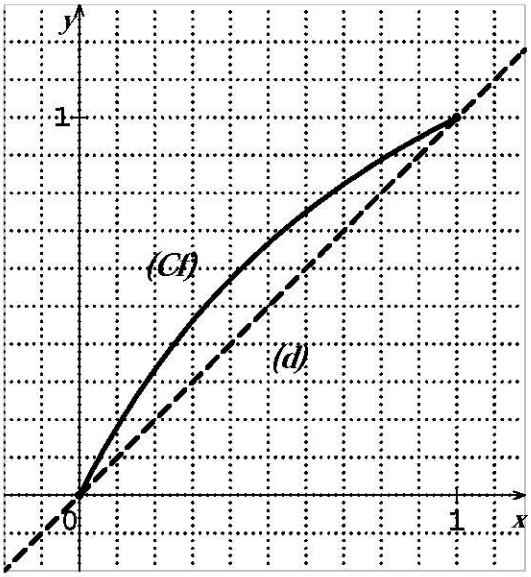
3) لتكن النقطة D ، حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

أ) بيّن أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب) احسب z_D لاحقة النقطة D .

ج) بيّن أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثاني: (04 نقاط)



في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل، $u_0=\frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثمّ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ) أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ج) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب) احسب نهاية (u_n).

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$. ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

1) أ) احسب إحداثيات النقطة I .

ب) بيّن أنّ: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P)؛ المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

3) أ) جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوى، ثمّ استنتج أن المثلث IEC قائم.

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE).

ب) أُحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.(وحدة الطول $2\,cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة : $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f).

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
الموضوع الأول		
التمرين الأول (04,5 نقط)		
1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (BC) : $x=1+t$ ؛ $y=-t$ ؛ $z=-1+2t$ $(t\in R)$	0,75	01,25
(BC) محتوى في (P) : $2(-t)+(-1+2t)+1=0$	0,5	
2) (Δ) و (BC) غير متوازيين وغير متقاطعين إذن (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.	$2\times 0,5$	1
3) أ) المسافة بين A و (P) $d(A;(P))=\frac{6\sqrt{5}}{5}$	0,5	02,25
ب) D نقطة من (P) $2(0)-1+1=0$	0,25	
BCD مثلث قائم $BC^2=6$ ، $BD^2=1$ ، $CD^2=1$	0,5	
4) $ABCD$ رباعي الوجوه $A\in(P)$ لأن $d(A,(P))\neq 0$ علما أن $(P)=(ABC)$	0,5	
- حجم رباعي الوجوه $ABCD$ $V=\frac{1}{3}A_{(BCD)}\times d(A;(P))=1uv$	0,5	

التمرين الثاني (04 نقط)		
I) 1) (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$ و حدّها الأول $v_0=5$	0,75	01
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$	0,25	
II) 1) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $1\le u_n\le 6$	1	03
2) (u_n) متزايدة تماما $u_{n+1}-u_n>0;u_{n+1}-u_n=\frac{(6-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$	0,5	
3) أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $6-u_{n+1}\le\frac{2}{3}(6-u_n)$ $(\frac{1}{6+\sqrt{5u_n+6}}<\frac{1}{6})$	0,5	
ب) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $0\le 6-u_n\le v_n$ (يمكن استعمال البرهان بالتراجع)	0,5	
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=6$ $(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=6)$.	0,5	

التمرين الثالث (05 نقط) 1) $\Delta = 4i^2\sin^2\alpha$ ..... $z' = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ، $z'' = 2(\cos\alpha - i\sin\alpha)$	0,5 0,5	01
2) تحديد $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ (أو العكس)..... $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ و $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = +1$	0,25 $2\times 0,5$	01,25
3) أ) إنشاء النقط A ، B و C ($A \in C_{(O;2)}$ وفاصلتها 1 و B نظيرة A بالنسبة $(x'x)$ و C لها نفس ترتيب A . ب) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ..... $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}i(z_B - z_A)$ ، C صورة B بالتشابه الذي نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ جـ) $z_G = 4 + 2i\sqrt{3}$ إنشاء G..... د) $z_D = 4$	0,75 0,5 0,5 $2\times 0,25$ 0,5	02,75

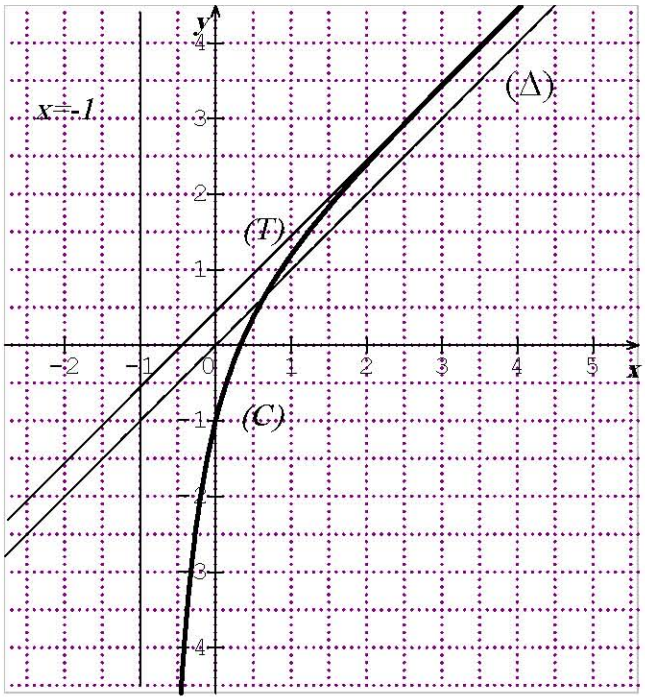
التمرين الرابع: (06,5 نقط) I) 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ ؛ $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$ ..... $y = 2$ ، $x = 1$ معادلتا مستقيمين مقاربين	0,5 0,5	01
2) من أجل $x \in]-\infty;1[$ ، $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}(1 + e^{\frac{1}{x-1}})$ ..... بما أنّ $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty;1[$ فإنّ f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$ ..... جدول التغيّرات	0,5 0,25 0,25	01
3) للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α من $]-\infty;1[$ (مبرهنة القيم المتوسطة) $0,21 < \alpha < 0,22$	0,25 0,25	0,5
4) إنشاء المستقيمين المقاربين لـ (C) ..... إنشاء المنحنى (C) ..... إنشاء المنحنى (C') الممثل للدالة $\lvert f \rvert$	0,5 0,5 0,25	01,25
5) للمعادلة $\lvert f(x) \rvert = m$ حلّين مختلفين في الإشارة من أجل $m \in \left]\frac{1}{e};2\right[$	0,25	0,25
II) 1) $g'(x) = f'(2x-1)$ إذا كان $x < 1$ فإن $2x - 1$ ، وعليه $f'(2x-1) < 0$ g متناقصة تماما على $]-\infty;1[$	$0,25\times 2$ 0,25	01,5

	0,5 0,25	$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 2$ ، $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} g(x) = -\infty$ ..... جدول تغيّرات g (نفس جدول تغيرات f)..... ....

1	0,5 0,5	**الموضوع الثاني** **التمرين الأول: (04,5 نقط)** 1) $-2-3i$ حل للمعادلة (E) $(-2-3i)^2+4(-2-3i)+13=0$ ..... استنتاج الحل الآخر للمعادلة (E) . $\overline{-2-3i}$ .....
01,5	1 0,5	2) أ) الكتابة المركبة للتشابه S $z'-z_A=\frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{2})}(z-z_A)$ ..... ب) $z_C=-4-2i$ .....
02	0,5 0,5 0,5 0,5	3) أ) D مرجح النقطتين A و B مرفقين بالمعاملين -3 و 1 على الترتيب ..... ب) لاحقة D هي $z_D=-3-5i$ ..... ج) $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ..... ACD مثلث قائم في A و متساوي الساقين ($AD=AC$ و $((\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$

04	0,50	**التمرين الثاني: (04 نقط)** 1) أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3:
	0,25	ب) التخمين: (u_n) متزايدة تماما و متقاربة.
	0,50	2) أ) $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ ، f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.
	0,50	ب) البرهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $0<u_n<1$.
	0,75	جـ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$ و منه $u_{n+1}-u>0$ أي (u_n) متزايدة تماما.
	0,75	3) أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$. الحد الأول : $v_0=-1$.
	0,50	ب) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ $u_n=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
	0,25	$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$. (لأن $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$).

التمرين الثالث (04,5 نقط) 1) أ) $I\left(\frac{3}{2};0;1\right)$ ..... ب) التحقق أنّ I نقطة من (P) (تقبل كل طريقة سليمة)..... $\overrightarrow{AB}$ ناظمي لـ (P)	0,25 0,25 0,5	01
2) (Δ) تمثيل وسيطي له $(k\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=k-\frac{3}{2} \\ y=2k-2 \\ z=-4k+1 \end{cases}$ (يقبل أي تمثيل وسيطي آخر).....	0,5	0,5
3) أ) تقاطع (P) و (Δ) : $t=\frac{1}{3}$ و منه $E\left(-\frac{7}{6};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$	$2\times0,5$	01
ب) (AB) و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا ..... أي المثلث IEC قائم في E (يقبل أي تبرير) $(EC^2+IE^2=IC^2)$	0,5 0,5	01
4) أ) $(ID)\perp(AB)$ و $(ID)\perp(IE)$..... ب) حجم رباعي الوجوه $DIEC$ $V=\frac{28}{9}uv$	$2\times0,25$ 0,5	01

التمرين الرابع (07 نقط) I) $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$ 1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)=+\infty$ ..... $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$	0,25 0,5	0,75
من أجل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2x^2+4x}{x+1}$ ..... إشارة $g'(x)$ حسب قيم x إذا كان $-1<x\le0$ فإن $g'(x)\le0$ و إذا كان $x\ge0$ فإن $g'(x)\ge0$ جدول التغيّرات ..... 2) $g(x)\ge4$ ومنه $g(x)>0$	0,5 0,25 0,25 0,25	01,25
II) 1) أ) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$ ..... $x=-1$ معادلة مستقيم مقارب ..... ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\frac{1}{x+1}+2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$	0,25 0,25 0,25	0,75

01,5	0,5 0,25 0,25 0,25 0,25	2) أ) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ..... ب) f دالة متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ..... جدول تغيّرات f ..... جـ) للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في $]-1;+\infty[$ (مبرهنة القيم المتوسطة) $f(0)=-1$ و $f(0,5)\approx 0,37$. $0<\alpha<0,5$ .....
01	0,25 0,25 0,5	3) أ) $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ ب) $f(x)-x=\dfrac{-1+2\ln(x+1)}{x+1}$ .... استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) x: -1 ، $-1+\sqrt{e}$ ، $+\infty$ $f(x)-x$: $\|$ ، $-$ ، 0 ، $+$
0,5	0,5	4) أ) $x_0=-1+\sqrt{e^3}$، .....
1,25	1 0,25	ب) رسم المستقيمين المقاربين، المماس (T) و (C_f) ..... ج) $0<m<\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ .....